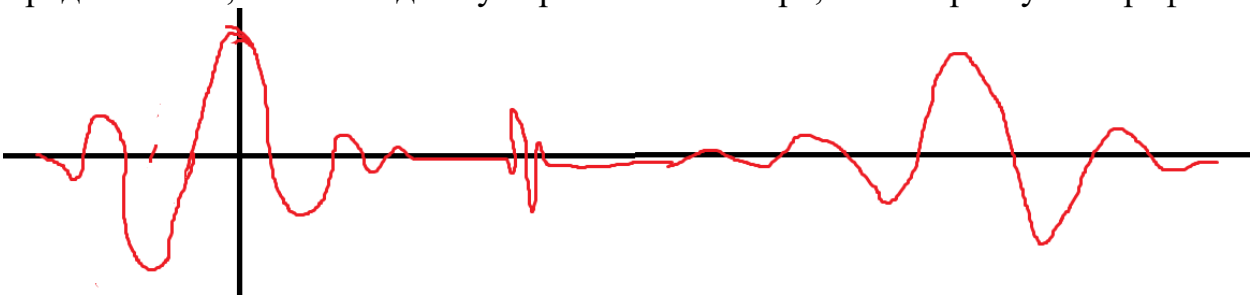
78. Что такое вейвлет-анализ? Для чего он применяется?
79. В чем состоят преимущества и недостатки вейвлет-преобразования перед фурье-преобразованием? Приведите примеры применения вейвлет-анализа..

Изначально «вейвлет-анализ» назывался «всплеск-анализом», и это неслучайно. Слово «всплеск» запомните, оно нам ещё попадётся.

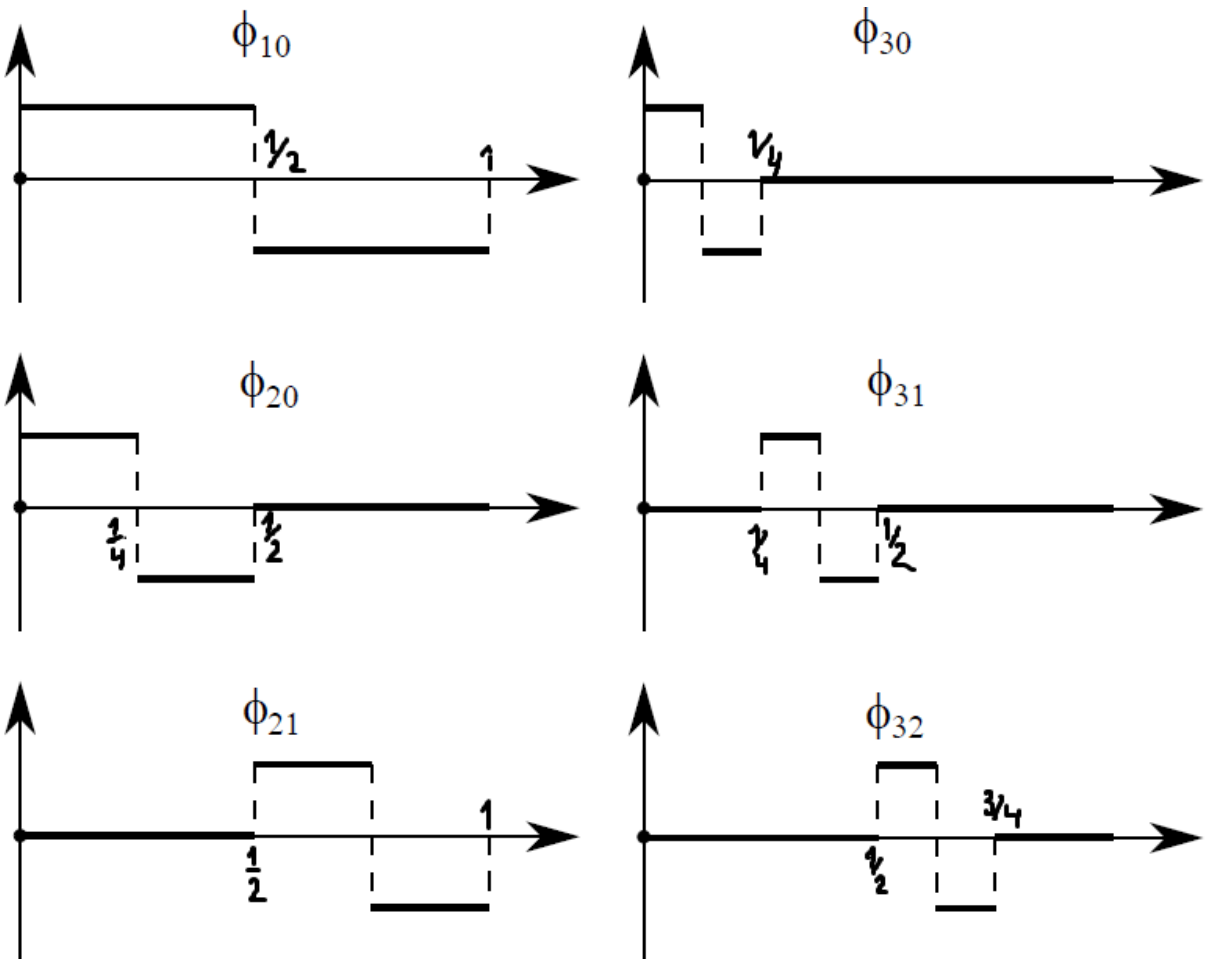
Предположим, что вы сидите у экране компьютера, на котором у вас график



Задача, стоящая перед вами: разложить по частотам.
Попытка один: у нас тут какая-то функция, тупо запихнуть в Фурье.
Однако, присмотревшись к графику, в обратите внимание, что он представляет набор всплесков – сигналов на разных частотах, причём явно локализованных по координате. Вот самый высокочастотный расположился в центре, например. Т.е. по виду здесь три частоты: частота левого всплеска, частота центрального всплеска и частота правого всплеска.
Можно сказать, что у нас функция по внешнему виду смахивает на нечто в духе
$y(x)=C1*\exp(-(x-x1)^2/2\sigma1^2)*\cos(\omega_1 x+\varphi_1)+ C2*\exp(-(x-x2)^2/2\sigma2^2)*\cos(\omega_2 x+\varphi_2)+ C3*\exp(-(x-x3)^2/2\sigma3^2)*\cos(\omega_3 x+\varphi_3)$.
Кстати, ещё одно место, где вы можете видеть подобную функцию – ЭКГ ☺
В Фурье же мы раскладываем по синусам и косинусам, где ничего про локализацию нет! В итоге частоты, которые мы получим по Фурье, вообще не факт, что будут иметь хоть что-то с общее с ω_1 , ω_2 , ω_3).

В итоге мы приходим к выводу, что для таких сигналов, состоящих из отдельных импульсов, раскладывать по синусам и косинусам – не лучший вариант.

А по какой же системе функций раскладывать? Тут матмодельщики постарались и придумали 100500 систем функций. Мы рассмотрим лишь одну возможную систему функций, но зато подробно – систему функций Харра.



Как вы заметили, каждая функция содержит в себе два индекса, и это неслучайно: первый кодирует частоту, второй место «вплеска».

Вася Пупкин, поработавший с вашим сигналом, сообщил, что в нём преобладают $\phi_{50,\,26}$, $\phi_{50,\,27}$, $\phi_{50,\,28}$ и $\phi_{79,\,131}$, $\phi_{80,\,131}$. Сможете что-нибудь сказать о сигнале?
Да. Где-то на оси абсцисс в районе 27/50 находится всплеск на частоте 50. Также всплеск есть в районе 131/79,5, на частоте 79..80 Гц.

Вы, конечно, ждёте, что я скажу, что функции Харра являются вейвлетами. Я тоже так думал, однако, как оказалось, именно терминами «вейлет» называется не любая система функций. Какие же должны быть требования?

Давайте я процитирую Боголюбова, а потом дам комментарии:
(у Боголюбова аргумент t, у меня x, это ничего не меняет)

1) Допустимость. Анализирующий вейвлет $\psi(t)$, называемый также **материнским вейвлетом**, должен иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{851}$$

2) Подобие. Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига:

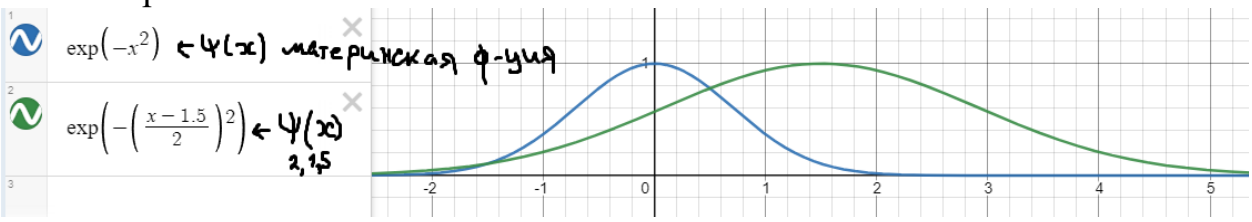
$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{852}$$

Получается двухпараметрическое семейство функций: параметр – масштаб (растяжение) функции, параметр b – положение (сдвиг) функции.

3) Обратимость. Существование обратного преобразования, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет – преобразованию.

4) Регулярность. Функция $\psi(t)$ должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве, и в пространстве Фурье.

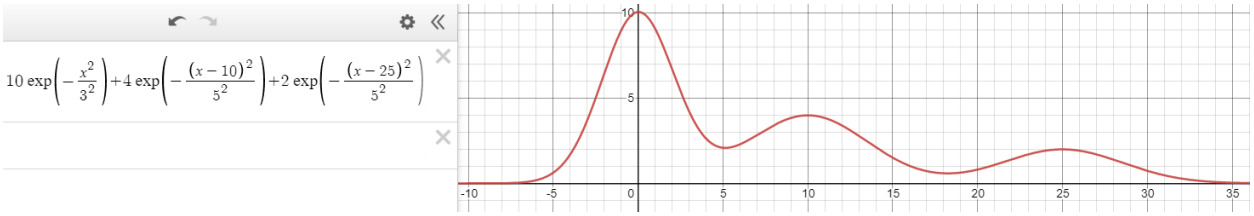
У каждой систем вейвлетов должен быть свой Адам, откуда они начинают свой род – некая функция Ψ(t). ***Она называется материнской или анализирующей.*** Это должно быть что-то в духе $1/(1+x^2)$ или $\exp(-x^2)$ - хорошо локализованное и по краям быстро затухающее (это как раз требование регулярности – при уходе на бесконечность стремись, плиз, к нулю). Ну и обе функции, которые я привёл, чётные. В идеале надо брать чётные, если не получается чётные – ну хоть со средним значением в нуле (это как раз первое условие, допустимости).
Все остальные вейвлеты получаются из Адама сдвигом на b и сжатием/растяжением на a.



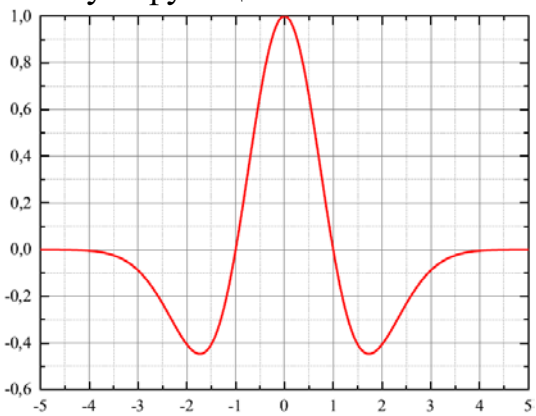
Система вейвлетов всегда двухпараметрическая! Если вам в переходе продавец вместе с Айфоном за 5 тысяч предлагает трёхпараметрическую систему вейвлетом, это всё обман!

Ну и видно, что система функций Харра этим требованиям не удовлетворяет. А какая удовлетворяет? Например, из вот такого Адама
$\Phi(x)=\exp(-x^2)$
Получится неплохое человечество:
$\Phi_{a,b}(x)=\Phi((x-b)/a)= \exp(-(x-b)^2/a^2)$

Эта система вейвлетов неплохо пригодится для описания такого горного пейзажа:



Однако плохо пригодится для описания ЭКГ, где в каждом всплеске ещё содержатся и колебания: меняя параметры a и b, мы можем менять расположение горы и её ширину, но вот колебания вызвать не можем.
Чуть лучше для неё (ЭКГ) будет система вейвлетов, порождённая $\Phi(x)=(1-x^2)*\exp(-x^2)$
Боголюбов такую функцию называет «мексиканской шляпой» из-за её графика:



На графике мы видим, что у нас не просто гора, а всплеск с колебаниями, что и позволяет нам подобными вейвлетами описывать ЭКГ.

А как выглядит Вейвлет-преобразование? Да очень похоже на Фурье-преобразование:

$$W(a,b) = a^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t,$$

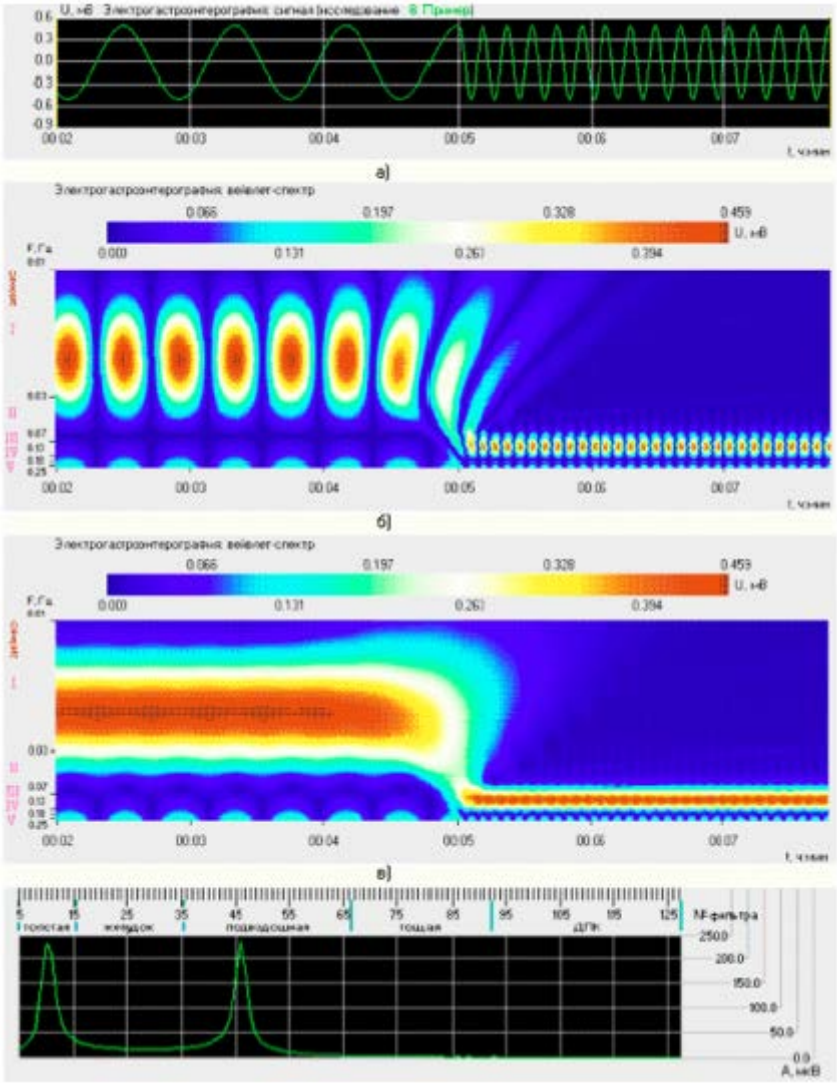
$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)W(a,b)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^{3+k}}.$$

Константы C_Ψ и k подбираются индивидуально для каждой материнской функции $\Psi()$.

Напоследок я хочу пояснить смысл фразы Боголюбова:

Преимущество вейвлет – преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале.

Вот вы представьте себе, что у вас лежит пациент, а вы смотрите его кардиограмму.



В момент времени 00:05 вы говорите ему «А ты знаешь, что в этом (шестом) семестре у тебя ядерные праки с Евгением Вадимовичем?» (Спецядерные праки ведёт НЕ общий яд, но он пока об этом не знает). Всё, пульс резко скаканул (что и мы видим на графике сверху).

Сделали скриншот, отправили график в Фурье. Он нам ожидаемо выдал два пика. Что понятно по этим двум пикам? Да ничего: то ли у пациента два сердца на разных частотах, то ли он, наоборот, успокоился…

А теперь посмотрим на любой из двух графиков с помощью вейвлетов. На обоих видно: в 00:05 что-то произошло! Вот это «изменение спектральных свойств со временем» и имел в виду Боголюбов.